

Упражнения по курсу **Методы оптимизации**

5–6 семестры, 2013/2014 уч. год

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.
2. Доказать, что единичный шар в пространстве $C[a, b]$ не является компактным множеством.
3. Доказать, что пространство $C[a, b]$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ не является гильбертовым.
4. Доказать, что "параллелепипед" в $L^2(a, b)$ с постоянными границами $\alpha(t) \equiv \alpha < \beta \equiv \beta(t)$ не является компактным множеством.
5. Доказать, что "гильбертов кирпич"

$$U = \left\{ x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq 2^{-n}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2 .

6. Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление

$$f(x+h) = f(x) + f_1 \cdot h + f_2 \cdot \frac{h^2}{2} + \bar{o}(h^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

7. Пусть $J(u) \in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g \rangle dt \quad \forall u, h, g \in H.$$

8. Вычислить первые и вторые производные квадратичного функционала в гильбертовом пространстве H :

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H, \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad f \in H.$$

9. Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где $g : R^1 \rightarrow R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли он в точке $u = 0$ в случае $g(t) = t^3$?

10. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^l \rho(x) |y(x; u) - z(x)|^2 dx$$

в пространстве $L^2(0, l)$, где $y(x) = y(x; u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -u(x), & 0 < x < l, \\ y(0) = 0, & y'(l) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) \geq 0$ – заданные функции.

11. Вычислить градиент функционала $J(u) = \sum_{i=1}^{N-1} |y_i(u) - z_i|^2 h$ в пространстве R^{N-1} сеточных функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$. Здесь $h > 0$ – шаг разностной сетки, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{N-1})$ – заданная дискретная траектория, а $y_i = y_i(u)$ – решение разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = -u_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, & y_N = 0. \end{cases}$$

12. В пространстве $L^2(0, l)$ найти первые производные квадратичных функционалов

$$J(u) = \iint_Q |y(t, x; u) - f(t, x)|^2 dt dx \quad \text{и} \quad J(u) = \int_0^l |y(T, x; u) - f(x)|^2 dx,$$

заданных на решениях $y = y(t, x; u)$ третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{xx}, & (t, x) \in Q &= (0, T) \times (0, l), \\ -y_x + \sigma_0 y|_{x=0} &= 0, & y_x + \sigma_1 y|_{x=l} &= 0, & 0 < t < T, \\ y|_{t=0} &= u(x), & 0 < x < l & \quad (\sigma_0 > 0, \sigma_1 > 0). \end{aligned}$$

13. Пусть H – гильбертово пространство, L – его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряженным оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).

14. Пусть x_0 – фиксированный элемент из H , $x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = pr_{x_0+L}h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell \rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

15. Вычислить проекции точек на гиперплоскость $\{u \in H \mid \langle c, u \rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед $\{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$ в R^n .

16. Выписать явное выражение для шага α_k метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H$ ($A^* = A \geq 0$).

17. Найти все угловые точки множества $U = \{u \in R^4 \mid u \geq 0, Au = b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и исследовать их на невырожденность.

18. Доказательство теоремы отделимости точки от непустого выпуклого множества в R^n .

19. Пусть $A \in L(H \rightarrow F)$, пространства H, F – гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \overline{\text{Im} A} \oplus \ker A^*$, $H = \overline{\text{Im} A^*} \oplus \ker A$.

20. Пусть H – гильбертово пространство, отображение $G(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u)) : H \rightarrow R^n$ дифференцируемо по Фреше и $G'(u) = (g'_1(u), \dots, g'_n(u)) \in L(H \rightarrow R^n)$ – его первая производная. Доказать, что сопряженный к $G'(u)$ оператор $(G'(u))^* \in L(R^n \rightarrow H)$ действует по правилу

$$(G'(u))^* \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i g'_i(u), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n.$$

21. Множество M в R^2 задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) \mid F(x) = 0\}$, где $F(x) = x_1^2 - x_2^4$. Найти множество $T_0 M$ касательных векторов к M в точке $0 = (0, 0)$ и ядро $\text{Ker} F'(0)$. Верно ли равенство $T_0 M = \text{Ker} F'(0)$?

22. С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u \rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H . Здесь $A \in L(H \rightarrow H)$, $A = A^* \geq 0$ (если $\dim H = \infty$, существование решения предполагается).

23. Построить вторую двойственную задачу к канонической задаче линейного программирования и показать, что она совпадает с исходной задачей.

24. Построить двойственную задачу к задаче минимизации

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad Au = f,$$

где $A \in L(H \rightarrow R^n)$, $f \in R^n$, H – гильбертово пространство.

25. Решить задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^T (-x(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x'(t) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0; \quad |u(t)| \leq a.$$

Рассмотреть случаи а) $T > 2a > 0$ и б) $0 < T < 2a$.

26. Показать, что функционал $J(u) = \int_0^T x^2(t) dt$, где $x(t) = x(t; u)$ – решение задачи Коши

$$x'(t) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = 0,$$

не является сильно выпуклым в пространстве $L^2(0, T)$.

27. В пространстве R^2 найти нормальное решение u_* системы линейных уравнений $Au = f$, где $u = (u_1, u_2)$, $Au = (2u_1 + u_2, 2u_1 + u_2)$, $f = (5, 5)$. Для системы с приближенным оператором $\tilde{A}u = (2u_1 + u_2, (2 - \delta)u_1 + u_2)$, $\delta > 0$, найти экстремали

$$\tilde{u} = \operatorname{argmin}_{u \in R^2} T_\alpha(u)$$

функционала Тихонова $T_\alpha(u) = \|\tilde{A}u - f\|^2 + \alpha \|u\|^2$ и исследовать их на сходимость к u_* при $\delta \rightarrow 0$ и значениях параметра регуляризации а) $\alpha = 0$ (регуляризация не проводится), б) $\alpha = \delta$.

Некоторые задачи из письменных контрольных работ 2013/2014 уч. года

1. В пространстве $L^2(0, \pi)$ поставлена задача безусловной минимизации

$$J(u) = \int_0^\pi \left(\int_0^x u(\xi) d\xi - f(x) \right)^2 dx \rightarrow \inf, \quad u = u(x) \in L^2(0, \pi).$$

Решите эту задачу для двух конкретных целевых функций $f(x) = \sin 2x$ и $f(x) = \cos 2x$, т.е. найдите нижние грани J_* , множества оптимальных решений U_* и выясните, обладают ли произвольные минимизирующие последовательности свойствами сильной и слабой сходимости.

2. В гильбертовом пространстве $L^2(-1, 1)$ поставлена задача условной минимизации:

$$J(u) = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\pi |\cos(\pi x)|} u(x) dx \right)^2 - 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 x \sqrt{|x|} u(x) dx \rightarrow \inf,$$
$$8 \left(\int_{-1}^1 x \sqrt{|x|} u(x) dx \right)^2 + \int_{-1}^1 \sqrt{\pi |\cos(\pi x)|} u(x) dx \leq 0.$$

Решите эту задачу, т.е. найдите нижнюю грань J_* , множество U_* ее оптимальных решений и решение u_* с минимальной нормой.

3. Пусть $f(x) \in C^1[a, b]$ – некоторая заданная непрерывно дифференцируемая функция. В пространстве $L^2(a, b)$ поставлена задача минимизации с ограничением:

$$J(u) = \int_a^b u^2(x) dx + 2 \int_a^b \left(f'(x) - u(x) \right)^2 dx \rightarrow \inf, \quad \int_a^b u(x) dx = f(b).$$

Решите эту задачу, т.е. найдите нижнюю грань J_* и множество U_* ее оптимальных решений.

4. При некотором $\tau > 0$ линейный оператор, действующий по правилу

$$Au(t) = \frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

рассматривается на множестве T -периодических функций, где $T = 30\tau$. Покажите, что этот оператор является ограниченным отображением из $L^2(0, T)$ в $L^2(0, T)$ и опишите правило действия сопряженного к нему оператора A^* . Решите задачу на условный экстремум

$$J(u) = \|Au\|_{L^2(0, T)} \rightarrow \text{extr}, \quad u \in U = \left\{ \|u\|_{L^2(0, T)} = 1 \right\},$$

т. е. найдите нижнюю и верхнюю грани J_* и $J^* = \|A\|$, а также какие-либо оптимальные элементы

$$u_* = \operatorname{argmin}_{u \in U} J(u) \quad \text{и} \quad u^* = \operatorname{argmax}_{u \in U} J(u).$$